Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет "ЛЭТИ"

кафедра физики

Задание №2 по дисциплине

"Физические основы информационных технологий"

Название: Численное решение уравнения Лапласа

|  |  |
| --- | --- |
| Фамилия И.О.: | Андреева Е.А |
| группа: | 1303 |
| Преподаватель: | Альтмарк А.М. |
| Итоговый балл: |  |
|  |  |

Крайний срок сдачи: 05.11.23

Санкт-Петербург 2023

Условие задания

Дана электростатическая система, состоящая из трех электродов. Внешний электрод (на рисунке 1 отмечен синим цветом) обладает потенциалом 0 В. Внутренние электроды (на рисунке отмечены красным цветом и пронумерованы как 1 и 2) обладают потенциалами, отличными от 0. Исходные данные нужно взять в файле FOIT\_IDZ2.xlsx. Для одной из указанных в таблице эквипотенциальных линий необходимо найти длину и записать её в файл IDZ2.txt. Контуры электродов можно построить по формулам, указанным в таблице и сравнить с соответствующим изображением в jpeg – файле. Координаты в данном задании можно считать безразмерными.

Помимо текстового файла IDZ2.txt в папке IDZ2 должен находиться Word-файл с отчетом, а также файл с кодом (Python, Mathcad, Mathematica). Для лучшего понимания отчетности смотрите папку “Пример организации яндекс-папки студентов”.

Пример содержания файла IDZ2.txt:

4.53258

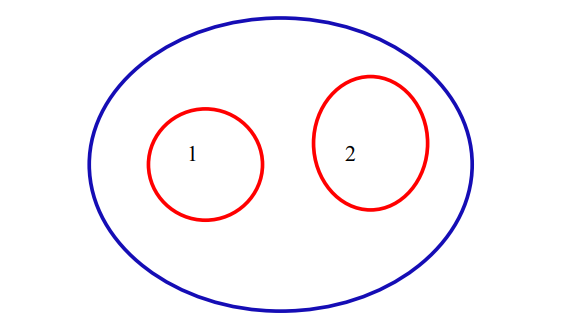


Рисунок 1. Пример электростатической системы

Исходные данные



Основные теоретические положения

Уравне́ние Пуассо́на — [эллиптическое](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%BB%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F) [дифференциальное уравнение в частных производных](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B2_%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D1%8B%D1%85), которое описывает

* [электростатическое поле](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%B5),
* [гравитационное поле](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%B5),
* стационарное поле температуры,
* поле давления,
* поле потенциала скорости в гидродинамике.

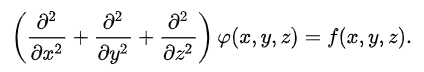
Оно названо в честь [французского](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F) [физика](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA) и [математика](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA) [Симеона Дени Пуассона](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%83%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BE%D0%BD,_%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BE%D0%BD_%D0%94%D0%B5%D0%BD%D0%B8).

Это уравнение имеет вид:

{\displaystyle \Delta \varphi =f,} 

где {\displaystyle \varphi } — искомая функция, {\displaystyle \Delta } — [оператор Лапласа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%9B%D0%B0%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D1%81%D0%B0), или [лапласиан](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%B0%D0%BD), а {\displaystyle f} —заданная [вещественная](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%89%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) или [комплексная](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) [функция](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) на некотором [многообразии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5).

В трёхмерной [декартовой системе координат](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) уравнение принимает форму:

{\displaystyle \left({\frac {\partial ^{2}}{\partial x^{2}}}+{\frac {\partial ^{2}}{\partial y^{2}}}+{\frac {\partial ^{2}}{\partial z^{2}}}\right)\varphi (x,y,z)=f(x,y,z).} 

В [декартовой системе координат](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) оператор Лапласа записывается в форме {\displaystyle \Delta } {\displaystyle \nabla ^{2}} ({\displaystyle \nabla } — [оператор набла](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%BD%D0%B0%D0%B1%D0%BB%D0%B0)) и уравнение Пуассона принимает вид:

{\displaystyle {\nabla }^{2}\varphi =f.}

Уравнение Пуассона с  {\displaystyle f\equiv 0} называется [уравнением Лапласа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%9B%D0%B0%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D1%81%D0%B0):

{\displaystyle \Delta \varphi =0.}

Уравнение Пуассона может быть решено с использованием [функции Грина](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%D0%93%D1%80%D0%B8%D0%BD%D0%B0); см., например, статью [экранированное уравнение Пуассона](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%9F%D1%83%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BE%D0%BD%D0%B0). Есть различные методы для получения численных решений.

Значимость уравнения Пуассона для проблем электростатики заключается в том, что с его помощью решение может быть найдено практически всегда, а с помощью теоремы Гаусса только в исключительных случаях.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**ФАЙЛ IDZ2.NB**

electrode = x^2 + y^2 == 16;

electrode1 = 0.3\*Abs[1.5 + x]^4 + 0.3\*Abs[-1.5 + y]^4 == 0.5;

electrode2 = Abs[-1.5 + x]^4 + 0.3\*Abs[1.5 + y]^2.5 == 0.5;

region = ImplicitRegion[x^2 + y^2 <= 16, {{x, -5, 5}, {y, -5, 5}}];

region1 = ImplicitRegion[0.3\*Abs[1.5 + x]^4 + 0.3\*Abs[-1.5 + y]^4 <= 0.5, {{x, -5, 5}, {y, -5, 5}}];

region2 = ImplicitRegion[Abs[-1.5 + x]^4 + 0.3\*Abs[1.5 + y]^2.5 <= 0.5, {{x, -5, 5}, {y, -5, 5}}];

area = RegionDifference[region, RegionUnion[region1, region2]];

dirichletConditions = {DirichletCondition[u[x, y] == 0, electrode],

DirichletCondition[u[x, y] == -5, electrode1],

DirichletCondition[u[x, y] == -5, electrode2]};

result = NDSolve[{Laplacian[u[x, y], {x, y}] == 0, dirichletConditions}, u, {x, y} \[Element] area];

mainPlot = ContourPlot[u[x,y]/. First[result],{x, y} \[Element] area, ColorFunction->"Rainbow"];

linePlot = ContourPlot[Evaluate[u[x,y]/. result]==-1,{x, y} \[Element] area, Contours->1, ContourStyle->Blue];

Show[mainPlot, linePlot]

discretizedLine = DiscretizeGraphics[linePlot];

length = RegionMeasure[discretizedLine]